

Logique – devoir maison

Date limite : 8 avril 2026, 13h59, heure de Paris

Consignes. Vous pouvez utiliser les résultats vus en cours ou dans des questions précédentes, si vous les citez de manière claire et non ambiguë. Les résultats vus en TD ou ailleurs qu'en cours, s'ils sont utilisés, doivent être redémontrés. Seules les notions et notations du cours et du sujet seront admises dans les réponses. Vous pouvez envoyer vos réponses en un unique fichier PDF par mail à svangoool@ens-paris-saclay.fr avec comme sujet [DM logique], suivi par votre nom et prénom, ou les remettre en version papier avant le début du TD du mercredi 8 avril.

Dans tout ce sujet, on utilise la version du calcul des séquents **LJ** donnée au **cours 7**, et on se restreint à la logique intuitionniste *propositionnelle*, **IPC**. Dans toute preuve en calcul des séquents, vous devez annoter les règles conformément aux noms qui y sont donnés.

L'objectif des sections **1** et **2** est de démontrer un théorème de complétude pour **IPC** par rapport aux modèles finis. La section **3** construit un modèle *universel* pour la logique intuitionniste propositionnelle sur un nombre de variables fini.

1 L'algèbre de Lindenbaum

Dans toute cette section, on fixe un ensemble P de variables propositionnelles. On note \mathcal{F} pour l'ensemble de formules propositionnelles avec variables dans P .

Définition A. La relation \preceq sur \mathcal{F} est définie, pour toutes φ, ψ , par

$$\varphi \preceq \psi \text{ si et seulement si } \varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi .$$

La relation \equiv sur \mathcal{F} est définie, pour toutes φ, ψ , par $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\varphi \preceq \psi$ et $\psi \preceq \varphi$.

Question 1. Montrer que \preceq est réflexive et transitive.

Noter qu'il découle de la **Question 1** que \equiv est une relation d'équivalence sur \mathcal{F} . Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, on note $[\varphi]$ la \equiv -classe de φ .

Définition B. L'*algèbre de Lindenbaum* est le quotient $\mathcal{L} := \mathcal{F}/\equiv$, muni de la relation \leq définie par $[\varphi] \leq [\psi]$ si et seulement si $\varphi \preceq \psi$.

On note qu'il découle de la **Question 1** que la relation \leq est un ordre partiel bien défini sur \mathcal{L} .

Question 2. Montrer que, pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, $[\varphi \vee \psi]$ est le supremum de $[\varphi]$ et $[\psi]$ dans (\mathcal{L}, \leq) .

Question 3. Montrer que $[\perp]$ est l'élément minimal de (\mathcal{L}, \leq) .

On admet le résultat suivant :

Lemme C. Pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, $[\varphi \wedge \psi]$ est l'infimum de $[\varphi]$ et $[\psi]$ dans (\mathcal{L}, \leq) , et $[\top]$ est le maximum de (\mathcal{L}, \leq) .

Question 4. Soient φ, ψ, δ des formules. Montrer que $\varphi, \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$ si et seulement si $[\varphi] \wedge [\psi] \vdash_{\mathbf{LJ}} [\delta]$.

Question 5. Montrer que (\mathcal{L}, \leq) est une algèbre de Heyting.

2 La propriété de modèle fini

Définition D. Une fonction $h: A \rightarrow B$ entre treillis bornés est un *homomorphisme de treillis bornés* si $h(\perp_A) = \perp_B$, $h(\top_A) = \top_B$, et, pour tous $a_1, a_2 \in A$, $h(a_1 \vee_A a_2) = h(a_1) \vee_B h(a_2)$ et $h(a_1 \wedge_A a_2) = h(a_1) \wedge_B h(a_2)$.

Un homomorphisme de treillis bornés est un *plongement* si, pour tous $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \leq_A a_2$ si et seulement si $h(a_1) \leq_B h(a_2)$.

Question 6. Soit $h: A \rightarrow B$ un plongement de treillis bornés, et soient $a_0, a_1, a_2 \in A$ tels que $h(a_0) = \max\{b \in B \mid h(a_1) \wedge b \leq h(a_2)\}$. Montrer que $a_0 = \max\{a \in A \mid a_1 \wedge a \leq a_2\}$.

Définition E. Un treillis borné A est *distributif* si, pour tous $a, b, c \in A$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Question 7. Soit A un treillis borné.

- (a) Montrer que, si A est une algèbre de Heyting, alors A est distributif.
- (b) Montrer que, si A est fini et distributif, alors A est une algèbre de Heyting.

Définition F. Pour toute formule propositionnelle φ , l'ensemble $\text{Subf}(\varphi)$ des *sous-formules* de φ est défini inductivement comme suit :

- pour toute variable propositionnelle p , $\text{Subf}(p) := \{p\}$;
- $\text{Subf}(\perp) := \{\perp\}$;
- pour tout $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ et toutes formules φ_1, φ_2 ,

$$\text{Subf}(\varphi_1 \circ \varphi_2) := \{\varphi_1 \circ \varphi_2\} \cup \text{Subf}(\varphi_1) \cup \text{Subf}(\varphi_2) .$$

Définition G. Soit L un treillis borné et $S \subseteq L$ un sous-ensemble. Le *sous-treillis borné engendré* par S est le plus petit sous-ensemble A de L tel que $S \subseteq A$, $\perp \in A$, $\top \in A$, et, pour tous $a, b \in A$, $a \vee b \in A$ et $a \wedge b \in A$.

Pour le reste de cette section, on fixe une formule propositionnelle φ , on note P l'ensemble (fini) des variables propositionnelles apparaissant dans φ , et on écrit $P = \{p_1, \dots, p_k\}$. On note \mathcal{L} l'algèbre de Lindenbaum pour l'ensemble de formules propositionnelles avec variables dans cet ensemble P , et on définit A_φ comme le sous-treillis borné de \mathcal{L} engendré par l'ensemble $\{[\psi] \mid \psi \in \text{Subf}(\varphi)\}$.

Question 8. Montrer que A_φ a au plus 2^{2^n} éléments, où $n = |\text{Subf}(\varphi)|$, et en déduire que A_φ est une algèbre de Heyting.

Question 9. Dessiner un diagramme du poset A_φ dans le cas $\varphi = p \vee \neg p$. En déduire que les opérations \rightarrow_{A_φ} et $\rightarrow_{\mathcal{L}}$ ne coïncident pas nécessairement : exhiber des éléments $b_1, b_2 \in A_\varphi$ tels que $b_1 \rightarrow_{A_\varphi} b_2 \neq b_1 \rightarrow_{\mathcal{L}} b_2$.

On rappelle la définition suivante du cours.

Définition H. Soit A une algèbre de Heyting et $f: P \rightarrow A$ une fonction. On définit inductivement $\bar{f}(\varphi) \in A$: pour $p \in P$ et $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$,

- $\bar{f}(p) := f(p)$,
- $\bar{f}(\varphi \vee \psi) := \bar{f}(\varphi) \vee_A \bar{f}(\psi)$;
- $\bar{f}(\perp) := \perp_A$;
- $\bar{f}(\varphi \wedge \psi) := \bar{f}(\varphi) \wedge_A \bar{f}(\psi)$;
- $\bar{f}(\varphi \rightarrow \psi) := \bar{f}(\varphi) \rightarrow_A \bar{f}(\psi)$.

Considérons la fonction $f: P \rightarrow A$, qui envoie $p \in P$ sur $[p]$.

Question 10. Montrer que, pour tout $\psi \in \text{Subf}(\varphi)$, on a $\bar{f}(\psi) = [\psi]$. *Indication.* Appliquer la Question 6 à la fonction d'inclusion $A_\varphi \rightarrow \mathcal{L}$.

Question 11. Supposons que, pour toute algèbre de Heyting finie A et toute fonction $f: P \rightarrow A$, on ait $\bar{f}(\varphi) = \top_A$. Montrer que $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$.

Définition I. Soit A un treillis borné. Un élément $x \in A$ est dit *sup-premier* si $x \neq \perp$ et, pour tous $a, b \in A$, si $x \leq a \vee b$ alors $x \leq a$ ou $x \leq b$. On note $\mathcal{J}(A)$ l'ensemble des éléments sup-premiers de A . On définit l'ordre partiel $\leq_{\mathcal{J}(A)}$ sur $\mathcal{J}(A)$ comme étant la restriction de l'ordre sur A .

Pour (W, \leq) un poset, on rappelle qu'une partie $S \subseteq W$ est *décroissante* si, pour tout $s \in S$ et $w \in W$, si $s \geq w$, alors $w \in S$. On note $\mathcal{D}(W, \leq)$ pour le treillis complet des parties décroissantes de W . Soit A un treillis borné. On définit la fonction $\eta_A: A \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{J}(A), \leq_{\mathcal{J}(A)})$ par, pour tout $a \in A$,

$$\eta_A(a) := \{x \in \mathcal{J}(A) \mid x \leq a\} .$$

Question 12. Montrer que, pour tout treillis borné distributif fini A , la fonction η_A est un plongement surjectif de treillis bornés.

Définition J. On note $\mathbf{2}$ l'ensemble $\{0, 1\}$, et $\mathbf{2}^k$ désigne l'ensemble des suites binaires de longueur k . On note \sqsubseteq l'ordre partiel point-à-point sur $\mathbf{2}^k$, c'est-à-dire que $c \sqsubseteq c'$ ssi $c(i) \leq c'(i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, et on note \sqsubset l'ordre partiel strict correspondant.

Un k -modèle est un triplet $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$, où (W, \leq) est un poset et $V: (W, \leq) \rightarrow (\mathbf{2}^k, \sqsubseteq)$ est une fonction croissante. Un k -modèle $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$ est *fini* si l'ensemble W est fini.

Un k -modèle s'interprète de manière naturelle comme modèle d'**IPC** sur l'ensemble de propositions P : pour $w \in W$ et $1 \leq j \leq k$, on définit $\mathcal{M}, w \models p_j$ ssi le $j^{\text{ième}}$ bit de $V(w)$ vaut 1. On note que la condition de monotonie sur V garantit que cette définition est persistente. Les clauses inductives de la définition de $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sont les mêmes que celles données en [cours 7](#).

Question 13. Montrer : si pour tout k -modèle enraciné fini $\mathcal{M} = (W, \leq, V, w_0)$, on a $\mathcal{M}, w_0 \models \varphi$, alors $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$.

3 Le modèle universel

Dans toute cette section, on fixe $k \geq 1$ et $P := \{p_1, \dots, p_k\}$ un ensemble de variables propositionnelles. On note \mathcal{F} pour l'ensemble de toutes les formules propositionnelles à variables dans P . L'objectif de cette section est de construire un modèle *universel* pour la logique **IPC** sur l'ensemble de propositions P .

Rappelons qu'une *antichaîne* dans un poset (G, \leq) est un sous-ensemble S de G tel que, pour tous $s, s' \in S$, si $s \leq s'$ alors $s = s'$.

Définition K. On définit une suite de posets (G_i, \leq_i) , pour $i \in \mathbb{N}$.

On définit $G_0 := \{(\emptyset, c) \mid c \in \mathbf{2}^k\}$, et $(\emptyset, c) \leq_0 (\emptyset, c')$ ssi $c = c'$. Par convention, on pose aussi $G_{-1} := \emptyset$ et $\leq_{-1} := \emptyset$.

Pour tout $i \geq 0$, G_{i+1} sera l'union disjointe de G_i et un sous-ensemble de $\mathcal{P}(G_i) \times \mathbf{2}^k$. Pour $(U, c) \in \mathcal{P}(G_i) \times \mathbf{2}^k$, on appelle c la *couleur* de (U, c) .

Pour tout $i \geq 0$, on dit qu'une antichaîne $U \subseteq G_i$ est *nouvelle* (au niveau i) si $U \not\subseteq G_{i-1}$. Notons qu'une antichaîne nouvelle est non-vide. Soit $U \subseteq G_i$ une antichaîne nouvelle et soit $c \in \mathbf{2}^k$. On dit que c est *bon pour* U si, pour tout $(U', c') \in U$, on a $c \sqsubseteq c'$, et, si U est un singleton, alors $c \sqsubset c'$, où c' est la couleur de l'unique élément de U .

On définit

$$\begin{aligned} N_i &:= \{(U, c) \in \mathcal{P}(G_i) \times \mathbf{2}^k \mid U \text{ une antichaîne nouvelle au niveau } i \text{ et } c \text{ bon pour } U\} , \\ G_{i+1} &:= G_i \sqcup N_i , \end{aligned}$$

et on définit \leq_{i+1} comme la fermeture réflexive transitive de la relation

$$\leq_i \cup \{ \langle (U, c), (U', c') \rangle \in N_i \times G_i \mid (U', c') \in U \} .$$

Enfin, on définit un k -modèle $\mathcal{G} = (G, \leq, V_G)$. On pose $G := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ et $\leq := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \leq_i$. Pour tout $(U, c) \in G$, on définit $V_G((U, c)) := c$.

Les posets G_0, G_1, G_2 dans le cas $k = 1$ sont représentés sur la Figure 1.

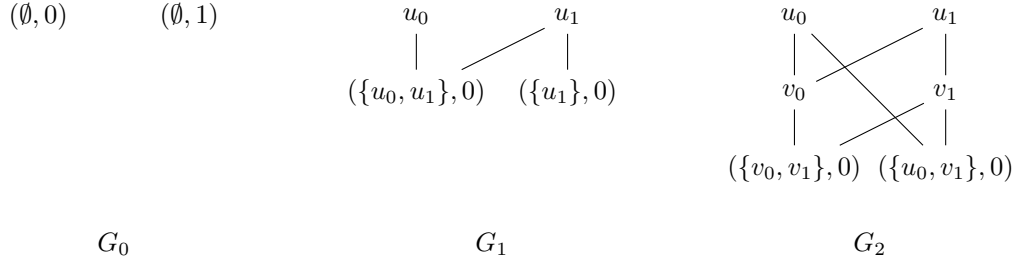


FIGURE 1 – Les posets G_0, G_1, G_2 dans le cas $k = 1$. Ici, on écrit $u_0 := (\emptyset, 0)$, $u_1 := (\emptyset, 1)$, $v_0 := (\{u_0, u_1\}, 0)$ et $v_1 := (\{u_1\}, 0)$.

Question 14. Dessiner G_3 dans le cas $k = 1$. Calculer le nombre d'éléments de G_1 dans le cas $k = 2$.

Définition L. Soient $\mathcal{M}_1 = (W_1, \leq_1, V_1)$ et $\mathcal{M}_2 = (W_2, \leq_2, V_2)$ deux k -modèles. Un *morphisme* de \mathcal{M}_1 vers \mathcal{M}_2 est une fonction $f: W_1 \rightarrow W_2$ telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. pour tous $w, w' \in W_1$, si $w \leq_1 w'$ alors $f(w) \leq_2 f(w')$;
2. pour tout $w \in W_1$ et tout $u' \in W_2$, si $f(w) \leq_2 u'$, alors il existe $u \in W_1$ tel que $w \leq_1 u$ et $f(u) = u'$;
3. pour tout $w \in W_1$, $V_1(w) = V_2(f(w))$.

Question 15. Soit $f: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ un morphisme entre k -modèles. Montrer que, pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$ et tout nœud w de \mathcal{M}_1 , on a $\mathcal{M}_1, w \models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}_2, f(w) \models \varphi$.

Soit (W, \leq) un poset et soient $w, w' \in W$. On écrit $\uparrow w := \{v \in W \mid w < v\}$. Le nœud w' est un *successeur immédiat* de w si $w' \geq w$ et, pour tout $v \in W$, si $w \leq v \leq w'$, alors $v = w'$ ou $v = w$.

Définition M. Soit $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$ un k -modèle. Soient $w_1, w_2 \in W$ deux nœuds distincts. On dit que (w_1, w_2) est une *paire réductible* dans \mathcal{M} si $V(w_1) = V(w_2)$ et l'une des conditions suivantes est remplie : (i) $\uparrow w_1 = \uparrow w_2$, ou (ii) w_2 est le seul successeur immédiat de w_1 . Le modèle \mathcal{M} est *réduit* s'il n'existe pas de paire réductible dans \mathcal{M} .

Question 16. Montrer que tout k -modèle fini admet un morphisme vers un k -modèle réduit.

Question 17. Montrer que tout k -modèle fini réduit admet un morphisme vers \mathcal{G} .

Question 18. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$. Montrer que $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$ si et seulement si $\mathcal{G}, u \models \varphi$ pour tout $u \in G$.

Question 19. Construire une famille $(\varphi_u)_{u \in G}$ de formules dans \mathcal{F} telle que, pour tout $w \in G$, $\mathcal{G}, w \models \varphi_u$ si et seulement si $u \leq w$.

Indication. Par récurrence sur i (Définition K). Dans la récurrence, définir en même temps une famille auxiliaire $(\psi_u)_{u \in G}$ telle que, pour tout $w \in G$, $\mathcal{G}, w \models \psi_u$ si et seulement si $w \not\leq u$.

Question 20. Montrer que, pour tout $u \in G$, $\varphi \in \mathcal{F}$, $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi_u \rightarrow \varphi$ si et seulement si $\mathcal{G}, u \models \varphi$.